

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Реферат на темы:

1. Примеры уравнения колебаний (математический маятник, грузик на жёсткой пружине, жидкость в сообщающихся сосудах, колебания заряда в электрическом контуре, колебания численности сотрудников в фирме).
2. Вывод закона сохранения момента импульса из принципа наименьшего действия из изотропности пространства.

Преподаватель:

Профессор МФТИ и ВМК МГУ
Александр Алексеевич Белолипецкий

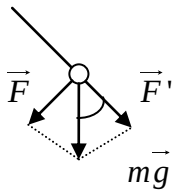
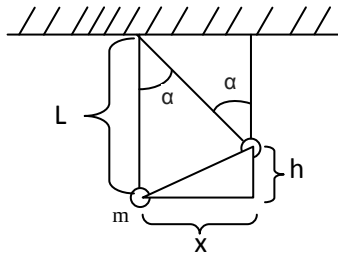
Студент:

1 курса магистратуры ВМК МГУ
511 группа
Мареев Глеб Олегович

Москва 2020

1. Примеры уравнения колебаний (математический маятник, грузик на жёсткой пружине, жидкость в сообщающихся сосудах, колебания заряда в электрическом контуре, колебания численности сотрудников в фирме).

1.1 Математический маятник



- Материальная точка
- Нерастяжимая/невесомая нить

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{l} \Rightarrow x = l \cos(\alpha)$$

$$h = l - x = l - l \cos(\alpha)$$

$$U = mgh = mgl(1 - \cos(\alpha))$$

$$L = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(l\dot{\alpha})^2}{2}$$

$$E_k = E_n = \text{const} \Rightarrow E'_k = E'_n = 0$$

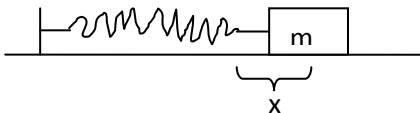
$$\left(\frac{ml^2\dot{\alpha}^2}{2}\right)' + (mgl(1 - \cos(\alpha)))' = 0$$

$$ml^2\ddot{\alpha} + mgl \sin(\alpha) = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \sin(\alpha) = 0 \quad (1.1) \text{ – уравнение маятника}$$

При малых α : $\sin(\alpha) \approx \alpha \Rightarrow$ можно $\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \alpha = 0$, $\ddot{\alpha} + w_0^2 \alpha = 0$, где $w_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

1.2 Грузик на жесткой пружине



При растягивании :

$$\text{работа} \int_0^x kdz = \frac{kx^2}{2} \quad (k\text{-жесткость пружины})$$

$$\text{Кинетическая энергия : } \frac{mv^2}{2} = \left(v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}\right) = \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

$$m\ddot{x} = -kx \text{ [закон Гука } F = -kx \text{]}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{однородное уравнение колебаний с } w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x'' + \frac{k}{m} x = 0$$

$$x'' + w_0^2 x = 0$$

$$\lambda^2 + w_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pm 2iw_0}{2}$$

$$x(t) = a \sin(w_0 t) + b \cos(w_0 t)$$

a, b - ?

Начальные условия :

$$x(0) = x_0 \Rightarrow b = x_0$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow a = 0$$

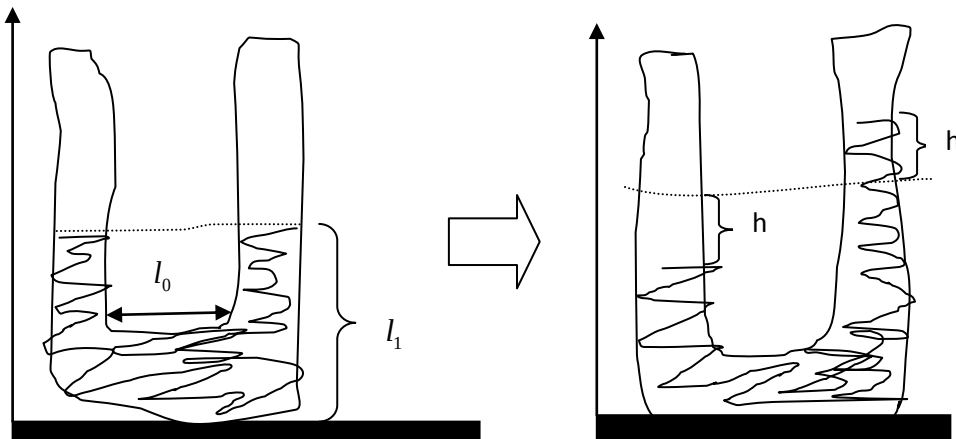
$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$\dot{x}(0) = v \Rightarrow aw_0 = v; a = \frac{v}{w_0}$$

$$x(t) = \frac{v}{w_0} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

1.3 Жидкость в сообщающихся сосудах



S – сечение трубки; M - масса жидкости; ρ - плотность жидкости
 g – ускорение свободного падения

$$E_k = \frac{M\dot{h}^2}{2}$$

Работа, если поршень переместить на dh

$$\underbrace{P(h)dh}_{\text{вес воды (h+h)}} = dA$$

вес воды (h+h)

$$A = \int_0^x p(h)dh = \int_0^x 2h\rho gsdh = \rho g s x^2 - \text{потенциальная энергия}$$

$$L = \frac{M\dot{x}^2}{2} - \rho g s x^2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$M\ddot{x} = -2\rho g S x$$

$$\ddot{x} + \frac{2\rho g S}{M} x = 0$$

$$\text{давление} = \frac{\text{вес}}{\text{площадь}}$$

$$\text{вес} = \text{давление} \times \text{площадь}$$

$$p(h) = \rho g h$$

$$F = \rho g h S$$

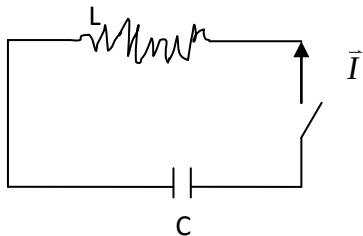
$$M = S(2l_1 + l_0)$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{2g}{2l_1 + l_0}}$$

$$\ddot{x} + w_0^2 x = 0$$

$$\frac{2\rho \cancel{S} \cancel{S}}{\cancel{S}(2l_1 + l_0)\cancel{S}} = \frac{2g}{2l_1 + l_0}$$

1.4 Колебания заряда в электрическом контуре



- $t = 0$ цепь замыкается
- Пусть сопротивление проводов нулевое
- $q(t)$ – заряд на обкладках конденсатора

Уравнение для $q(t)$ - ?

$I(t)$ – ток, $U(t)$ - напряжение

$$U(t) = \frac{q(t)}{c}$$

Емкость конденсатора – это величина заряда, который необходимо поместить на обкладки конденсатора, для увеличения разности потенциалов между ними

$\cancel{R} \Rightarrow$ падения напряжения на проводах нет $\Rightarrow \Delta U$ подается на катушку

$\xi = -L \frac{dI}{dt}$ - самоиндукция на катушке

$$\underbrace{U(t) = -\xi(t)} \Leftrightarrow \frac{q(t)}{C} = -\xi(t) = L \frac{dI}{dt}$$

Закон Ома для $\cancel{R}$

$$\text{Т.к. } I = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow L \frac{d^2 q}{dt^2} = -\frac{q}{c}$$

1.5 колебания численности сотрудников в фирме

$p(t)$ – з/п, $N(t)$ – число занятых

равновесие рынка : за $p_0 > 0$ согласны работать $N_0 > 0$

если равновесие нарушено, значит $N(t), p(t)$ отходит от N_0, p_0

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -\alpha_1(N - N_0), \alpha_1 > 0 & \text{- Изменение з/п} \\ \frac{dN}{dt} = \alpha_2(p - p_0), \alpha_2 > 0 & \text{- Изменение числа работников} \end{cases}$$

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = \alpha_2 \frac{dp}{dt} = -\alpha_1 \alpha_2 (N - N_0)$$

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = \frac{d[-\alpha_1(N - N_0)]}{dt}$$

$$\frac{d^2 N}{dt^2} = \frac{d[\alpha_2(p - p_0)]}{dt} = \frac{\alpha_2 dp}{dt} = -\alpha_1 \alpha_2 (N - N_0)$$

Стандартная модель колебаний

$$z_1 = N - N_0$$

$$\ddot{z}_1 + \alpha_1 \alpha_2 z_1 = 0$$

Аналогично :

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = -\alpha_1 \frac{dN}{dt} = -\alpha_1 \alpha_2 (p - p_0)$$

$$z_2 = p - p_0$$

$$\ddot{z}_2 + \alpha_1 \alpha_2 z_2 = 0$$

$$\ddot{z}_1 + \alpha_1 \alpha_2 z_1 = 0$$

$$\ddot{z}_2 + \alpha_1 \alpha_2 z_2 = 0$$

$$\alpha_1 z_1^2 + \alpha_2 z_2^2 = \text{const} > 0$$

$$\alpha_1 z_1 \dot{z}_1 + \alpha_2 z_2 \dot{z}_2 = 0$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \dot{N} = \alpha_2 (p - p_0) \\ \dot{z}_2 = \dot{p} = -\alpha_1 z_1 \end{cases}$$

$\ddot{u}(t) + w_0^2 u(t) = 0$ - Однородное уравнение колебаний

$$\lambda^2 + w_0^2 = 0$$

$$D = -4w_0^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{-4w_0^2}}{2} = \frac{\pm 2w_0 \sqrt{-1}}{2} = \pm w_0 i$$

$u(t) = C_1 \sin(w_0 t) + C_2 \cos(w_0 t)$ - Общее решение

2. Вывод закона сохранения момента импульса из принципа наименьшего действия из изотропности пространства.

Изотропия – свойства замкнутой механической системы не меняются при любом повороте системы в пространстве (как целого).

Пусть $\delta\varphi$ - вектор бесконечно малого поворота, $\delta r_a = [\delta\varphi \times r_a]$ -

приращение радиус-вектора частиц, приращение скорости: $\delta v_a = [\delta\varphi \times v_a]$.

В силу неизменности функции Лагранжа при повороте:

$$\delta L = \sum_{a=1}^N \left(\frac{\delta L}{\delta r_a} \delta r_a + \frac{\delta L}{\delta v_a} \delta v_a \right) = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{a=1}^N (\dot{p}_a [\delta\varphi \times r_a] + p_a [\delta\varphi \times v_a]) = 0, \text{ после}$$

циклической подстановки получим $\delta\varphi \sum_{a=1}^N ([r_a \times \dot{p}_a] + [v_a \times p_a]) = 0$ ($p_i = \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i}$ -

обобщенный импульс, $\dot{p}_i = F_i$ - обобщенная сила, $F_i = \frac{\delta L}{\delta q_i}$) Вектор поворота

выбирался произвольно, значит из последнего равенства

$$\Rightarrow \sum_{a=1}^N ([r_a \times \dot{p}_a] + [v_a \times p_a]) = \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N ([r_a \times p_a]) = 0, \text{ то есть, при движении}$$

замкнутой системы, момент импульса системы ($\vec{M}$):

$$M = \sum_{a=1}^N ([r_a \times p_a]) = \text{const}$$

В общем случае, момент импульса системы зависит от выбора начала координат.

✂ две системы, сдвинутые относительно друг друга на расстояние h .

Радиус-векторы в этих системах отсчета связаны соотношениями:

$$r_a = r'_a + h, \text{ следовательно } M = \sum_{a=1}^N [r_a \times p_a] = \sum_{a=1}^N [r'_a \times p_a] + [h \times \sum_{a=1}^N p_a] \text{ или}$$

$M = M' + [h \times P]$. Видно, что момент импульса не зависит от выбора начала координат лишь в том случае, если система в данной системе отсчета покоится как целое.

✂ систему отсчета K' , которая движется относительно системы K со скоростью U . Радиус-векторы и скорости связаны соотношениями

$$r = r' + Ut, v = v' + U. \text{ Поэтому } \sum_{a=1}^N m_a [r_a \times v_a] = \sum_{a=1}^N m_a [r'_a \times v'_a] + \sum_{a=1}^N m_a [r'_a \times U] + [U \times P']t.$$

Первая сумма в правой части – момент M' в системе K' , а вторая сумма преобразуется к виду $m[R \times U]$, где m - полная масса системы, а R – радиус-вектор ее центра масс к системе $K \Rightarrow M = M' + m[R \times U] + [U \times P']t$.

Если в системе K' механическая система покоится как целое, тогда $U=V$ – это скорость центра инерции, а mV - ее полный импульс P в системе K .

$\Rightarrow M = M' + [R \times P]$ - момент импульса механической системы складывается из ее собственного момента в системе отсчета, где она покоится как целое, и момента импульса в ее движении как целого.

Поместим систему материальных точек во внешнее поле. Пусть $U_B = U_B(r_1 - r_2, \dots, r_{N-1} - r_N)$ - потенциальная энергия взаимодействия частиц между собой, $U'_B(r_1, \dots, r_N; t)$ - потенциальная энергия внешнего поля.

Функция Лагранжа приобретает вид :

$$L = \sum_{a=1}^N \frac{m_a v_a^2}{2} - U_B(r_1 - r_2, \dots, r_{N-1} - r_N) - U'_B(r_1, \dots, r_N; t)$$

Уравнение Лагранжа $\{ m_a \frac{dv_a}{dt} = -\frac{\delta U_B}{\delta r_a} - \frac{\delta U'_B}{\delta r_a} \}$ умножим слева обе части на r_a (векторно), просуммируем от а до N.

Получаем : $\sum_{a=1}^N m_a [r_a \times \dot{v}_a] = -\sum_{a=1}^N [r_a \times \frac{\delta U_B}{\delta r_a}] - \sum_{a=1}^N [r_a \times \frac{\delta U'_B}{\delta r_a}]$, т.к. $\dot{r}_a = v_a$ и $[v_a \times v_a] = 0$,

левую часть можно представить в виде :

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^N m_a [r_a \times \dot{v}_a] + \sum_{a=1}^N m_a [\dot{r}_a \times v_a] &= \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N m_a [r_a \times v_a] = \frac{dM}{dt} \\ \Rightarrow \frac{dM}{dt} &= -\sum_{a=1}^N [r_a \times \frac{\delta U_B}{\delta r_a}] - \sum_{a=1}^N [r_a \times \frac{\delta U'_B}{\delta r_a}] \quad (*) \end{aligned}$$

При отсутствии внешнего поля : $\frac{dM}{dt} = 0 \Rightarrow \sum_{a=1}^N [r_a \times \frac{\delta U_B}{\delta r_a}] = 0$ - сумма

моментов сил взаимодействия между частицами замкнутой системы

равно нулю, а равенство (*) примет вид $\frac{dM}{dx} = \sum_{a=1}^N [r_a \times F'_a]$, где $F'_a = -\frac{\delta U'_B}{\delta r_a}$.

Данное равенство означает, что изменение момента системы материальных точек в единицу времени равно сумме моментов сил, приложенных к точкам системы со стороны внешнего поля.

$\Rightarrow$ Момент импульса системы материальных точек, помещенных во внешнее поле, в общем случае не сохраняется.